En la teoria de la informació, el *low-density parity-check code* (LDPC) és un ECC lineal, que corregeix bloc a bloc i que permet la transmissió de missatges a través d'un canal amb soroll. Els codis LDPC es construeixen usant una certa classe de grafs dispersos (on el nombre d'arestes és molt menor al màxim possible). Es tracta de codis que s'aproximen a la capacitat, la qual cosa significa que existeixen construccions pràctiques que permeten establir els llindars de soroll molt a prop del límit teòricament possible. Usant certes tècniques iteratives, els LDPC poden ser descodificats en temps lineal respecte de la seva longitud de bloc.

Una tècnica important per tal de codificar i descodificar de manera eficient es basa en uns grafs molt ben connectats, però alhora dispersos, anomenats *expanders*. És aquesta característica contraintuïtiva i aparentment contradictòria dels *expanders* —que estan dispersos però molt ben connectats— la que els fa molt útils, assenyala Peter Sarnak, un professor de matemàtiques de la Universitat de Princeton. Spielman i els seus coautors han fet una tasca fonamental usant aquests mètodes de teoria de grafs i han dissenyat mètodes molt eficients per a la codificació i descodificació.

L'article més famós de Spielman en aquest camp és «Improved low-density parity check codes using irregular graphs», que va compartir el 2002 Information Theory Society Paper Award. (Els grafs regulars, a diferència dels grafs irregulars, són aquells on cada vèrtex té el mateix nombre de veïns.) Aquest treball va demostrar que els codis LDPC irregulars es comporten molt millor que els més comuns, que utilitzen grafs regulars sobre un canal de soroll blanc, gaussià i additiu (AWGN).

Aquesta fou una extensió del treball anterior «Efficient erasure correcting codes», de Spielman i altres, que havia introduït els codis LDPC irregulars i havia demostrat que podien acostar-se a la capacitat de l'anomenat *binary erasure channel*. Aquests codis proporcionen una solució eficaç a problemes com la pèrdua de paquets a través d'Internet i són particularment útils en la difusió selectiva de comunicacions. També proporcionen una de les millors tècniques conegudes de codificació per a reduir al mínim el consum d'energia necessari per a aconseguir una comunicació fiable en presència de soroll blanc gaussià. Els codis LDPC irregulars han tingut molts altres usos, incloent el recent estàndard DVB-S2 (Digital Video Broadcasting - Satellite v2).

Spielman ha sol·licitat cinc patents per als ECC que ha inventat i quatre d'aquestes ja han estat concedides per l'oficina de patents dels Estats Units.

Computació científica combinatòria és el nom donat al camp interdisciplinari en el qual hom aplica la teoria de grafs i els algorismes combinatoris a problemes de ciències de la computació i d'enginyeria. Spielman ha focalitzat recentment la seva atenció a un dels problemes més fonamentals de la computació: el problema de resoldre un sistema d'equacions lineals, que és fonamental per a aplicacions científiques i d'enginyeria, programació matemàtica i d'aprenentatge automàtic. Ha trobat algorismes remarcables que funcionen en temps lineal i basats en particions de grafs per a diverses classes importants de sistemes lineals. Això ha portat tant a considerables avenços teòrics com a algorismes bons des d'un punt de vista pràctic.

«La bellesa de la interacció entre teoria i pràctica, ja sigui en programació matemàtica, en codis correctors d'errors, en la recerca de dispersors que assoleixen l'anomenada *fita de Ramanujan*, en l'anàlisi d'algorismes, en la teoria de la complexitat computacional, o en l'anàlisi numèrica, és característica de l'obra de Dan Spielman», diu Kalai.

R. Ramachandran

Premi Gauss 2010: Yves Meyer,

professor emèrit a l'École Normale Supérieure de Cachan, França

For fundamental contributions to number theory, operator theory and harmonic analysis, and his pivotal role in the development of wavelets and multiresolution analysis.

«Quan et sentis competent sobre una teoria, és hora d'abandonar-la.» Aquest ha estat el principi de Meyer en la seva destacada trajectòria de més de quatre dècades de recerca matemàtica. Creu que només els investigadors que són nous en un tema poden tenir imaginació i aconseguir grans contribucions. En aquest sentit, Meyer ha passat per quatre fases diferents en la seva activitat de recerca, corresponents a les seves exploracions de quatre àrees diferents —quasicristalls, el programa de Calderón-Zygmund, ones i l'equació de Navier-Stokes. La varietat de temes en els quals ha treballat és indicativa dels seus interessos generals. En cadascun d'aquests temes Meyer ha fet contribucions fonamentals. La seva extensa obra suggereix que no deixa un camp d'investigació on ha entrat fins que està convençut que el tema està exhaurit des d'un punt de vista lògic. És com si Meyer aparegués en escena, lligués caps desconnectats, donés una imatge unificadora dels diferents enfocaments existents, posés les bases per a un marc teòric adequat, sempre amb el segell de Meyer, i després sortís de l'escena.

Les llavors per als enfocaments altament originals de Meyer en totes les branques de les matemàtiques en què s'ha aventurat, es van sembrar segurament al principi de la seva carrera. Va començar la seva carrera de recerca després d'haver estat professor de secundària durant els tres anys següents a la seva educació universitària. Va completar el seu doctorat el 1966 amb només tres anys. «Vaig ser el meu propi supervisor quan vaig escriure la meva tesi», diu Meyer. Aquesta perspectiva individualista ha estat el seu segell fins al dia d'avui.

El 1970 Meyer va presentar algunes idees completament innovadores en anàlisi harmònica (una branca de les matemàtiques que estudia la representació de funcions o senyals com a superposició d'ones bàsiques), que van resultar ser no només útils en teoria de nombres, sinó també en l'anomenada *teoria dels quasicristalls*. Hi ha certs nombres algebraics anomenats *números de Pisot-Vijayaraghavan* i certs nombres coneguts com a *nombres de Salem*. Aquests tenen algunes propietats notables que apareixen en l'anàlisi harmònica i l'aproximació diofàntica (aproximació de nombres reals per nombres racionals). Per exemple, el nombre auri és un d'aquests nombres. Yves Meyer va estudiar aquests números i va demostrar un resultat remarcable. El treball de Meyer en aquesta àrea va portar a les nocions de Meyer, que han tingut un paper important en la teoria matemàtica dels quasicristalls.

Els quasicristalls són estructures ordenades que omplen l'espai, però que no tenen simetria de translació i són aperiòdiques en general. La teoria clàssica dels cristalls només permet simetries de rotació d'ordres 2, 3, 4 i 6, però els quasicristalls presenten simetries d'ordre 5, entre altres ordres. Igual que els cristalls, els quasicristalls produeixen difracció de Bragg modificada, però allà on els cristalls tenen una estructura de repetició simple, els quasicristalls presenten estructures més complexes com les tesselacions aperiòdiques. Les tesselacions de Penrose són un exemple d'una d'aquestes estructures aperiòdiques que presenta simetria d'ordre 5. Meyer va estudiar certs conjunts a l'espai euclidià n-dimensional (actualment coneguts com els *conjunts de Meyer*), que es caracteritzen per una certa propietat de finitud del seu conjunt de distàncies. La idea de Meyer fou que l'estudi d'aquests conjunts inclou l'estudi de possibles estructures de quasicristalls. Aquesta base formal s'ha convertit en una eina important en l'estudi de les estructures aperiòdiques en general.

El 1975 Meyer va col·laborar amb Ronald Coifman en el que s'anomenen *operadors de Calderón-Zygmund*. Els importants resultats que van obtenir van donar lloc a diversos treballs d'altres autors, que alhora han donat lloc a aplicacions en àrees com ara l'anàlisi complexa, les equacions en derivades parcials, la teoria ergòdica, la teoria de nombres o la teoria geomètrica de la mesura. Aquest enfocament de Meyer i Coifman es pot veure com la interacció entre dos paradigmes oposats: l'enfocament clàssic d'anàlisi complex i l'enfocament més modern de Calderón-Zygmund, que es basa principalment en tècniques de variable real. Avui en dia, és aquest últim enfocament el que domina, fins i tot per a problemes que en realitat pertanyen a l'àrea de l'anàlisi complexa.

L'enfocament de Calderón-Zygmund fou el resultat de la recerca de noves tècniques, ja que els mètodes d'anàlisi complexa no funcionen en dimensions superiors. Això va ser fet per S. Mihlin, Calderón i A. Zygmund, els quals van

investigar i resoldre el problema per una àmplia classe d'operadors, que ara es coneixen com als *operadors integrals singulars*, o *operadors de Calderón-Zygmund*. Aquests operadors integrals singulars són molt més flexibles que la representació estàndard d'un operador, segons Meyer. El seu treball conjunt amb Coifman sobre certs operadors integrals multilineals ha demostrat ser de gran importància per al tema. Amb Coifman i Alan MacIntosh va demostrar la fitació i la continuïtat de l'operador integral de Cauchy, que és l'exemple més famós d'un operador integral singular, sobre totes les corbes de Lipschitz. Això havia estat un problema obert en l'anàlisi des de fa molt de temps.

Meyer descriu la seva fase d'investigació sobre ondetes, que han tingut un gran impacte en el processament del senyal i la imatge, com una segona vida científica. Una *ondeta* és una breu oscil·lació semblant a una ona, amb l'amplitud que comença a zero, augmenta i disminueix de nou fins a zero, semblant a la que pot ser registrada per un sismògraf o un monitor cardíac. Però en matemàtiques les ondetes estan especialment construïdes per tal de satisfer certes exigències matemàtiques, i s'utilitzen en la representació de dades o altres funcions. Com a eines matemàtiques s'utilitzen per a extreure informació de molts tipus de dades, incloses les senyals d'àudio o les imatges. Generalment són necessaris conjunts d'ondetes per a analitzar les dades. Les ondetes es poden combinar amb porcions d'un senyal desconegut mitjançant la tècnica de convolució per a extreure'n informació.

La representació de funcions com una superposició d'ones no és nova. Es coneix des de principis del 1800, quan Joseph Fourier va descobrir que podia representar altres funcions mitjançant la superposició de sinus i cosinus. Les funcions sinus i cosinus tenen una freqüència ben definida, però s'estenen fins a l'infinit; és a dir, mentre estan localitzades en freqüència, no ho estan en el temps. Això significa que, tot i que podem ser capaços de determinar totes les freqüències en un senyal donat, no sabem quan estan presents. Per aquest motiu, un desenvolupament de Fourier no pot representar adequadament els senyals transitoris o senyals amb canvis bruscos. Durant dècades, els científics han buscat funcions adequades més enllà del sinus i el cosinus per aproximar els senyals entretallats.

Amb la intenció de superar aquest problema, s'han desenvolupat diverses solucions en les últimes dècades per a representar un senyal alhora en el domini del temps i de la freqüència. L'esforç en aquesta direcció es va iniciar en la dècada de 1930 amb la transformada de Wigner, una construcció deguda a Eugene Wigner, famós matemàtic i físic. Bàsicament les ondetes són els blocs de construcció d'uns espais de funcions que són més locals que les sèries de Fourier i les integrals. La idea darrere de les representacions conjuntes temps-freqüència és tallar el senyal d'interès en diverses parts i analitzar cada part per separat amb una resolució igual a la seva escala. En l'anàlisi d'ondetes, aquestes funcions d'aproximació que es troben en dominis finits esdevenen força apropiades per a l'anàlisi de dades amb discontinuïtats fortes.

La pregunta fonamental que l'enfocament amb ondetes intenta respondre és com tallar el senyal. La representació en el domini temps-freqüència té una limitació imposada pel principi d'incertesa de Heisenberg que tots dos dominis, temps i freqüència, no es poden localitzar simultàniament amb una precisió arbitrària. Per tant, desplegar un senyal en el pla temps-freqüència és un problema difícil que es podria comparar amb escriure una partitura i escoltar la música al mateix temps. Així, grups en diferents camps d'investigació han desenvolupat tècniques de descomposició de senyals localitzades en el temps i d'acord amb les escales de resolució del seu interès. Aquestes tècniques van ser les precursores de l'enfocament amb ondetes.

La tècnica d'anàlisi d'ondetes comença amb l'elecció d'una funció ondeta prototip, anomenada ondeta mare. L'anàlisi de resolució del temps es pot realitzar amb una versió contreta i d'alta freqüència de l'*ondeta mare*. L'anàlisi de resolució de freqüències es pot realitzar amb una versió dilatada i de baixa freqüència d'aquesta mateixa ondeta mare. La transformació d'ondeta, o anàlisi d'ondetes, és la solució més recent per a superar les limitacions de la transformada de Fourier. En l'anàlisi d'ondetes, l'ús d'una finestra modular totalment escalable resol el problema de com tallar el senyal esmentat anteriorment. La finestra es desplaça al llarg del senyal i per a cada posició es calcula l'espectre (i. e. la transformació). A continuació, es repeteix el procés diverses vegades amb finestres una mica més curtes (o llargues) per a cada nou cicle. El resultat d'aquesta anàlisi repetitiva del senyal

és una col·lecció de representacions temps-escala del senyal, cadascuna amb diferent resolució; en definitiva, resolució multiescala o anàlisi multiresolució. En poques paraules, l'escala gran dóna el panorama general, mentre que la petita mostra els detalls. És com fer *zoom* sense pèrdua de detalls. És a dir, l'anàlisi d'ondetes veu tant el bosc com els arbres.

En geofísica i exploració sísmica, es poden trobar models per a analitzar la propagació subterrània d'ones. En visió per ordinador s'usen descomposicions multiescala d'imatges, ja que l'escala depèn de la profunditat de l'escena. En el processament d'àudio, es desenvolupen bancs de filtres d'ample de banda constant (filtres dilatats) aplicats a l'anàlisi de sons i de parla, i per a manejar el problema de l'anàlisi multiescala del desplaçament Doppler dels senyals de radar. Les descomposicions multiescala van ser utilitzades en física quàntica per Kenneth G. Wilson per a la representació d'estats coherents i també per a analitzar les propietats fractals de les turbulències. En neurofisiologia, els models de dilatació van ser introduïts pel físic G. Zweig per a modelar les respostes de les cèl·lules simples del còrtex visual i de la còclea auditiva. L'anàlisi d'ondetes portaria tots aquests enfocaments diferents cap a un marc unificat. Meyer és àmpliament reconegut com un dels fundadors d'aquest marc: la teoria d'ondetes.

El 1981, Jean Morlet, un geòleg que treballava amb senyals sísmics, havia desenvolupat el que es coneix com a *ondetes Morlet*, que funcionaven molt millor que les transformades de Fourier. En realitat Morlet i Alex Grossman, un físic a qui Morlet s'havia apropat per comprendre la base matemàtica del que estava fent, van ser els primers a usar el terme *ondeta* (*wavelet* en anglès) el 1984. Meyer sentí parlar d'aquest treball i va ser el primer a adonar-se de la connexió entre les ondetes de Morlet i altres construccions matemàtiques anteriors, com ara el treball de Littlewood i Paley utilitzat per a la construcció d'espais funcionals i per a l'anàlisi dels operadors singulars en el programa de Calderón-Zygmund.

Meyer va estudiar si era possible construir una base ortonormal amb ondetes. (Una base ortonormal és com un sistema de coordenades en l'espai de funcions i, com els familiars eixos de coordenades, cada funció de la base és ortogonal a les altres. Amb una base ortonormal hom pot representar cada funció de l'espai en termes de les funcions de la base.) Això va portar al seu primer resultat fonamental en el tema d'ondetes, en un article al seminari Bourbaki on construeix una gran quantitat de bases ortonormals amb funcions de classe Schwarz (funcions que tenen valors només sobre una petita regió i que decauen ràpidament fora). Aquest article va ser un gran avenç que va permetre una anàlisi posterior per part del propi Meyer. «En aquest article», diu Stéphane Mallat, «la construcció de Meyer havia aïllat les estructures clau en les quals jo vaig poder reconèixer les similituds amb les eines utilitzades en visió per computador per a l'anàlisi multiescala d'imatges, i en el processament de senyal per als bancs de filtres.»

Una col·laboració entre Mallat i Meyer va donar lloc a la construcció de l'anàlisi matemàtica multiresolució i a una caracterització de les bases ortonormals d'ondetes amb filtres mirall conjugats, que els permet implementar un primer algorisme de transformació d'ondetes que funciona més ràpid que l'algorisme de la transformada ràpida de Fourier (FFT). Gràcies al resultat de Meyer-Mallat, les ondetes esdevenen molt més fàcils d'utilitzar. Hom pot fer ara una anàlisi d'ondetes sense conèixer la fórmula per a l'ondeta mare. El procés es va reduir a simples operacions de fer la mitjana de grups de píxels i mirar diferències, una i altra vegada. El llenguatge de les ondetes també va esdevenir molt més còmode per als enginyers elèctrics.

En els anys vuitanta la revolució digital estava a l'ordre del dia i hi havia una necessitat crítica de trobar algorismes eficients per al processament del senyal i la imatge. L'estàndard JPEG per a compressió d'imatges va ser desenvolupat en aquest moment. El 1987, Ingrid Daubechies, una estudiant de Grossman, mentre visitava el Courant Institute de Nova York i més tard durant el seu treball a l'AT&T Bell Labs, va descobrir una classe particular de filtres mirall conjugats amb suport compacte, que no només eren ortogonals (com els de Meyer) sinó que també eren estables, i es podien implementar usant idees de filtratge digital ben simples. Les noves ondetes eren senzilles de programar i eren funcions suaus, a diferència d'algunes de les funcions de salt anteriorment considerades. Els processadors de senyal tenen ara una eina fabulosa: una manera de trencar el senyal digital en contribucions a diverses escales.

Combinant les idees de Daubechies i Mallat, hom pot fer una senzilla transformació ortogonal que pot ser calculada ràpidament pels ordinadors moderns. Les ondetes de Daubechies converteixen la teoria en una eina pràctica que pot ser fàcilment programada i usada per qualsevol científic amb un mínim de formació matemàtica. El primer article Bourbaki de Meyer va establir, de fet, les bases del marc matemàtic adequat per a les ondetes. Això va marcar el començament de la moderna teoria d'ondetes. En els últims anys les ondetes han començat a oferir una alternativa interessant als mètodes de transformada de Fourier.

Curiosament, la primera reacció de Meyer a l'obra de Grossman i Morlet va ser «I què? Nosaltres els analistes harmònics sabíem tot això fa molt de temps!». Però va mirar el treball una altra vegada i es va adonar que Grossman i Morlet havien fet alguna cosa diferent i més interessant. Es va basar en aquesta diferència per formular finalment la seva construcció bàsica. «La construcció de Meyer de les bases ortonormals i els seus resultats posteriors a l'àrea van ser el descobriment clau que obre la porta a tots els nous desenvolupaments matemàtics i aplicacions. Meyer va estar al centre de la catàlisi que va reunir matemàtics, científics i enginyers per a la construcció de la teoria i els algorismes resultants» diu Mallat.

Del treball de Daubechies i Mallat, se n'han explorat moltes aplicacions, incloent el processament del senyal amb multiresolució, compressió d'imatges i dades, telecomunicacions, anàlisi d'empremtes dactilars, estadística, anàlisi numèrica i processament de la parla. L'algorisme ràpid i estable de Daubechies va ser millorat posteriorment en un treball conjunt entre Daubechies i Albert Cohen, un estudiant de Meyer, el qual s'està utilitzant ara en el nou estàndard JPEG2000 per a la compressió d'imatges i és avui dia part del conjunt d'eines estàndard per al processament d'imatges i senyals. També s'han desenvolupat tècniques per a la restauració d'imatges de satèl·lit, basades en l'anàlisi d'ondetes.

Més recentment, ha trobat una sorprenent connexió entre els seus primers treballs en el model de sistemes utilitzats per a la construcció de quasicristalls —els *conjunts de Meyer*— i la tècnica del *compressed sensing*, utilitzada per a la creació i reconstrucció del senyal, usant el coneixement previ que aquest és compressible. Considerant això, ha desenvolupat un nou algorisme per al processament d'imatges. Una versió d'aquest algorisme s'ha instal·lat a la missió espacial Herschel de l'Agència Espacial Europea (ESA), l'objectiu de la qual és proporcionar imatges de les estrelles més antigues i més fredes de l'Univers.

«Que jo sàpiga», diu Wolfgang Dahmen, «Meyer mai ha treballat directament en un problema d'aplicació concreta.» Així, les matemàtiques de Meyer són bons exemples de com la investigació de qüestions fonamentals de la matemàtica sovint produeixen resultats sorprenents en benefici de la humanitat.

R. Ramachandran

Premi Chern 2010: Louis Nirenberg, Courant Institute of Mathematical Sciences, EUA

For his role in the formulation of the modern theory of non-linear elliptic partial differential equations and for mentoring numerous students and post-docs in this area.

Nirenberg és, sens dubte, un dels analistes més destacats del segle XX. La seva obra ha tingut una gran influència en el desenvolupament de diferents àrees de les matemàtiques i les seves aplicacions. En particular, ha estat un líder en la majoria dels desenvolupaments de la teoria d'equacions en derivades parcials (EDP) lineals i no lineals i àrees relacionades de l'anàlisi; les EDP són les eines matemàtiques bàsiques de la ciència moderna. Es plantegen en la física i la geometria quan els sistemes depenen de diverses variables al mateix temps, i les més interessants són no lineals. La importància de les EDP és clara si atenem al fet que dels set Problemes del Mil·lenni del Clay Mathematics Institute (CMI), tres són sobre (o estan relacionats amb) EDP. El treball de Nirenberg sobre EDP és profund i fonamental. Va desenvolupar connexions intricades entre anàlisi i geometria